Método de Euler

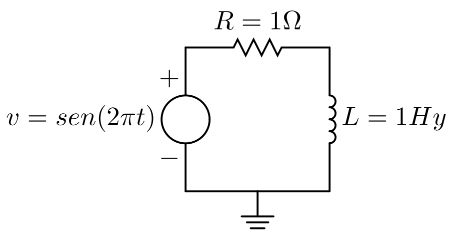
El método de Euler consiste en encontrar iterativamente la solución de una ecuación diferencial de primer orden y valores iniciales conocidos para un rango de valores. Partiendo de un valor inicial x_0 y avanzando con un paso h, se pueden obtener los valores de la solución de la siguiente manera:

$$Y_{k+1} = Y_k + h \cdot f(x_k, Y_k)$$

Donde Y es solución de la ecuación diferencial y f es la ecuación diferencial en función de las variables independientes.

Ejemplo

Se quiere obtener el valor de la corriente en el siguiente circuito RL hasta un segundo con un paso de un cuarto de segundo:



Planteando la malla correspondiente se puede obtener la ecuación del circuito de la figura:

$$\begin{aligned} v &= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{dt}} \\ \mathrm{sen}(t) &= i(t) + i'(t) \\ i'(t) &= \mathrm{sen}(2\pi t) - i(t) = f(t, i) \end{aligned}$$

Reescribiendo la fórmula de iteración con nuestras variables del problema llegamos a:

$$I_{k+1} = I_k + h \cdot f(t_k, I_k)$$

En primer lugar, reconocemos nuestros datos iniciales como $t_0 = 0$ e $I_0 = 0$. Además, la función será, en este caso, la derivada de la corriente. Respecto a t_k, dado que hay un paso constante h, se puede observar que en general $t_k = t_0 + h \cdot k$; por lo tanto, se puede observar que tomará tres iteraciones llegar a $t = 1$ debido a que los valores de salida siempre están un paso adelantado. Según nuestros índices, la primer iteración será la número 0:

$k = 0$

$$I_1 = I_0 + h \cdot f(0; 0) = 0$$

$k = 1$

$$I_2 = I_1 + h \cdot f(0,25; 0) = 0,25$$

$k = 2$

$$I_3 = I_2 + h \cdot f(0,5;1) = 0,1875$$

$k = 3$

$$I_4 = I_3 + h \cdot f(0,75;-1) = -0,1093$$

La solución de la ecuación diferencial, teóricamente, es:

$$i(t) = \frac{1}{1+4\pi^2} \cdot (2\pi e^{-t} + \operatorname{sen}(2\pi t) - 2\pi \cos(2\pi t))$$

Comparando con los valores teóricos:

t	Valor teórico	Valor aproximado	Error
0	0	0	0
0,25	0,1455	0	0,1455
0,5	0,2493	0,25	0,0007
0,75	0,0486	0,1875	0,1389
1	-0,0981	-0,1093	0,0112

Para mejorar la aproximación, se puede aumentar el tamaño de puntos (es decir, reducir el tamaño del paso h). Por otro lado, se puede utilizar un método de mayor orden para obtener una mejor aproximación usando la misma cantidad de puntos.

Método de Heun

Este método consiste en una mejora del método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y conocido el valor inicial. En este caso, lo que se realiza es un promedio entre el valor obtenido por Euler y otro obtenido a partir de la aproximación del valor de la función en el punto siguiente, también por Euler.

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, Y_k) + f(x_{k+1}, \dot{Y}_{k+1})\right]$$

Donde Y es solución de la ecuación diferencial, f es la ecuación diferencial en función de las variables independientes y la solución de $\dot{Y}_{k+1}$ es una aproximación de Euler.

Ejemplo

Recordando la ecuación diferencial del ejercicio anterior:

$$i'(t) = \operatorname{sen}(2\pi t) - i(t) = f(t, i)$$

Obtenemos la fórmula de iteración según el método de Heun:

$$I_{k+1} = I_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, I_k) + f(t_{k+1}, \dot{I}_{k+1})\right]$$

Nuevamente, los valores iniciales son $t_0 = 0$, $I_0 = 0$. En este caso, definiremos un valor $\dot{I}_{k+1}$ que corresponde a la aproximación de Euler en el paso siguiente. Realizando los cálculos:

$k = 0$

$$\dot{I}_1 = I_0 + h \cdot f(0;0) = 0$$
$$I_1 = I_0 + \frac{h}{2}\left[f(0;0) + f(0,25;\dot{I}_1)\right] = 0,125 = i(0,25)$$

$k = 1$

$$\dot{I}_2 = I_1 + h \cdot f(0,25;0,125) = 0,3437$$
$$I_2 = I_1 + \frac{h}{2}\left[f(0,25;0,125) + f(0,5;\dot{I}_2)\right] = 0,1914 = i(0,5)$$

$k = 2$

$$\dot{I}_3 = I_2 + h \cdot f(0,5;0,1914) = 0,1435$$
$$I_3 = I_2 + \frac{h}{2}\left[f(0,5;0,1914) + f(0,75;\dot{I}_3)\right] = 0,0245 = i(0,75)$$

$k = 3$

$$\dot{I}_4 = I_3 + h \cdot f(0,75;0,0245) = -0,2316$$
$$I_4 = I_3 + \frac{h}{2}\left[f(0,75;0,245) + f(0,75;\dot{I}_4)\right] = -0,0745 = i(1)$$

Comparando con los valores teóricos:

t	Valor teórico	Valor aproximado	Error
0	0	0	0
0,25	0,1455	0,125	0,00205
0,5	0,2493	0,1914	0,0579
0,75	0,0486	0,0245	0,00241
1	-0,0981	-0,0745	0,00242

A continuación, se ilustran la solución en un gráfico que relaciona la curva esperada con los puntos obtenidos por el método de Heun y de Euler:

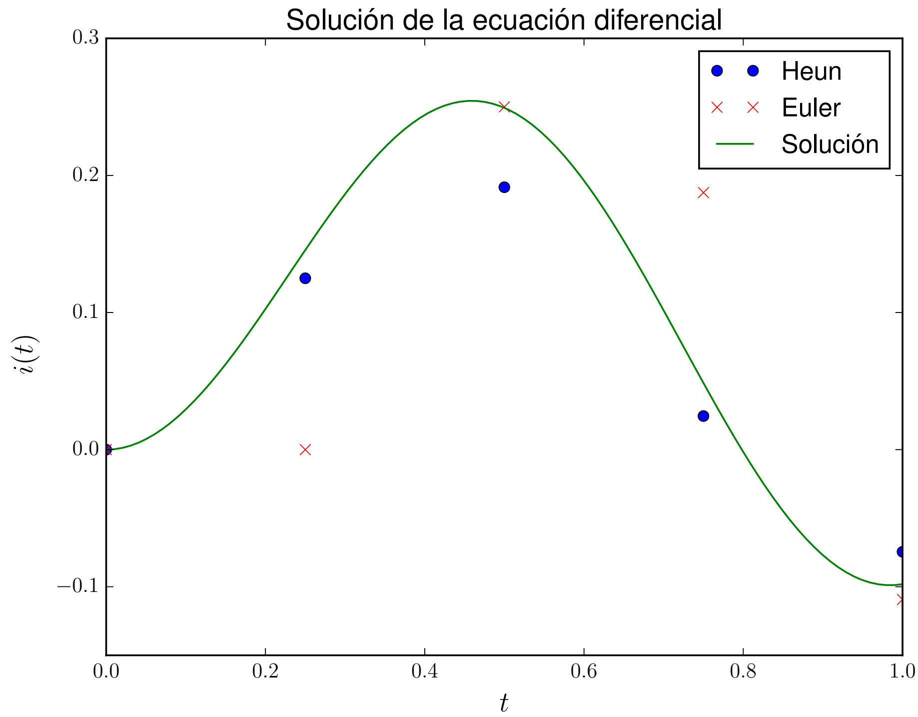


Figura 1: Gráficos de aproximaciones y valores teóricos

Se puede observar que, si bien para ciertos puntos el comportamiento es mejor para Euler, para el método de Heun, los puntos se comportan mejor según la forma de la solución respecto a la solución de Euler.